ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHAN NGUYỄN NGỌC DUNG

VỀ HÀM TỔNG - GCD

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHAN NGUYỄN NGỌC DUNG

VỀ HÀM TỔNG - GCD

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**
Mã số: **60 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. NÔNG QUỐC CHINH

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh mục ký hiệu

(m, n)	Ước chung lớn nhất của hai số m và n
$g(n) = \sum_{j=1}^{n} (j, n)$	Hàm tổng ước chung lớn nhất
$S(n) = \sum_{j=1}^{n} (2j-1, n)$	Hàm đếm điểm mạng
$\phi(n)$	Phi hàm Euler
$\omega(n)$	Số số nguyên tố phân biệt là ước của n
$d(n) = \sigma_0(n) = \sum_{d \mid n} d^0$	Hàm ước số
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \mathrm{Re(s)} > 1$	Hàm zeta Riemann
$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^2}, \mathrm{Re(s)} > 2$	Chuỗi Dirichlet
$G_\alpha(x) = \sum_{n \le x} \frac{g(n)}{n^\alpha}$	Hàm tổng riêng của chuỗi Dirichlet
$(f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$	Tích chập Dirichlet
$\mu(d)$	Hàm Möbius

Mở đầu

Trong toán học, nếu số nguyên a chia hết cho số nguyên d thì số d được gọi là ước của số nguyên a, a được gọi là bội của d. Số nguyên dương d lớn nhất là ước của cả hai số nguyên a, b được gọi là ước chung lớn nhất của a và b, ký hiệu $d = (a, b)$. Ước chung lớn nhất của hai số a và b có nhiều tính chất lý thú, ta có thể áp dụng để giải các bài tập về số học và hình học.

Năm 1935, Pillai [5] là người đầu tiên đưa ra định nghĩa hàm tổng ước chung lớn nhất (hàm Pillai) bằng hệ thức

$$g(n) = \sum_{j=1}^{n} (j, n)$$

trong đó (j, n) là ước chung lớn nhất của hai số j và n. Ông chứng minh rằng

$$g(n) = n \sum_{d|n} \frac{\phi(n)}{d},$$

trong đó $\phi(n)$ là hàm Euler. Hàm tổng ước chung lớn nhất là một hàm số sơ cấp được định nghĩa bằng tổng các ước chung lớn nhất của n số nguyên đầu tiên với n.

Trong quá trình phát triển của khoa học kỹ thuật nói chung và toán học nói riêng, kết quả về hàm tổng ước chung lớn nhất đã được nhiều nhà toán học phát triển theo các hướng khác nhau.

Năm 2001, một kết quả mới về ứng dụng của hàm tổng ước chung lớn nhất được công bố bởi Kevin A. Broughan. Hàm này xuất hiện khi tìm kiếm đánh giá xấp xỉ cho bài toán đếm điểm mạng. Bài toán đếm điểm mạng (điểm có tọa độ nguyên) của một vật thể là bài toán cổ trong lý thuyết số được đưa ra bởi Gauss và Dirichlet. Hàm tổng ước chung lớn nhất có quan hệ chặt chẽ với bài toán đếm điểm mạng.

Sau đó, nhiều nhà toán học trên thế giới đã quan tâm hướng nghiên cứu này và các kết quả về hàm tổng ước chung lớn nhất lần lượt được công bố, theo hướng đi sâu và mở rộng thành hàm tổng ước chung lớn nhất suy rộng.

Với mong muốn tìm hiểu sâu hơn về ước chung lớn nhất và hàm tổng ước chung lớn nhất, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nông Quốc Chinh tôi mạnh dạn chọn đề tài nghiên cứu: "**Về hàm tổng-gcd**".

Mục đích nghiên cứu của luận văn là khai thác về ước chung lớn nhất, hàm tổng ước chung lớn nhất cùng các tính chất số học của hàm tổng ước chung lớn nhất dựa trên bài báo "The gcd-Sum Function" của Kevin A. Broughan đăng trong tạp chí Journal of Integer Sequence năm 2001.

Nội dung của luận văn gồm ba chương:

Chương 1. Ước chung lớn nhất. Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và các tính chất cơ bản về ước chung lớn nhất của các số tự nhiên. Để tìm ước chung lớn nhất, chúng tôi trình bày thuật toán Euclid.

Chương 2. Hàm tổng ước chung lớn nhất. Trong chương này, chúng tôi trình bày các kết quả gần đây về hàm tổng ước chung lớn nhất bao gồm định nghĩa và một số tính chất, chuỗi Dirichlet với số hạng tổng quát là hàm tổng ước chung lớn nhất.

Chương 3. Ứng dụng. Trong phần này, chúng tôi trình bày cách ứng dụng của hàm tổng ước chung lớn nhất trong bài toán đếm điểm mạng nguyên. Ngoài ra còn có một số bài tập phổ thông về ước chung lớn nhất.

Trong quá trình thực hiện luận văn thạc sĩ, tác giả đã nhận được sự giúp đỡ, tạo điều kiện nhiệt tình và quý báu của nhiều cá nhân, tập thể.

Lời đầu tiên tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS.TS. Nông Quốc Chinh đã tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình làm luận văn này.

Tác giả xin chân thành cảm ơn toàn thể các thầy cô trong Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình hướng dẫn, truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian theo học, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Cảm ơn sự giúp đỡ của bạn bè, người thân và các đồng nghiệp để tôi có

thể hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2016

Tác giả

Phan Nguyễn Ngọc Dung

Chương 1

Ước chung lớn nhất

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và các tính chất cơ bản về ước chung lớn nhất của các số tự nhiên. Để tìm ước chung lớn nhất, chúng tôi trình bày thuật toán Euclid. Các bài tập trong toán học phổ thông về ước chung lớn nhất được trình bày trong mục 1.3.

1.1 Khái niệm và tính chất của ước chung lớn nhất

Trong lý thuyết số, tập *số tự nhiên* là

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

và tập *số nguyên* là

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

Định nghĩa 1.1.1. ([7]). Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ ta nói rằng *b chia hết a*, ký hiệu $a \mid b$, nếu tồn tại $c \in \mathbb{Z}$ để xảy ra $ac = b$. Trong trường hợp này, ta nói rằng a là *ước* của b. Ta nói rằng *b không chia hết a*, ký hiệu $a \nmid b$, nếu không tồn tại $c \in \mathbb{Z}$ sao cho $ac = b$.

Khi $a \mid b$ ta cũng nói b là bội của a hoặc b chia hết cho a và ký hiệu là $b \vdots a$.

Ví dụ 1.1.2. Ta có $2 \mid 6$ vì với $3 \in \mathbb{Z}$, $2 \cdot 3 = 6$, $-3 \mid 15$ vì với $-5 \in \mathbb{Z}$ thì $-3 \cdot (-5) = 15$, $3 \nmid 7$ trong $\mathbb{Z}$ vì $7 = 2 \cdot 3 + 1$, vì vậy 3 không là ước của 7.

Nhận xét 1.1.3. Tất cả mọi số nguyên đều là ước của 0, và 0 chỉ là ước của không. Mọi số nguyên đều có ước là 1 và chính nó, ta gọi chúng là các ước tầm thường.

Định nghĩa 1.1.4. ([7]). Một số nguyên $n > 1$ được gọi là *nguyên tố* nếu n chỉ có ước là 1 và chính nó. Nếu số n không là số nguyên tố thì ta nói n là *hợp số*.

Ví dụ 1.1.5. Dãy các số nguyên tố đầu tiên trong $\mathbb{N}$ là

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, \ldots$$

và các hợp số đầu tiên là

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, \ldots$$

Nhận xét 1.1.6. Số 1 không là hợp số cũng không là số nguyên tố.

Định lý 1.1.7. (Định lý cơ bản của số học). *Mọi số tự nhiều đều được viết duy nhất dưới dạng tích của các số nguyên tố nếu không kể đến thứ tự các nhân tử.*

Định nghĩa 1.1.8. Một số nguyên dương d được gọi là ước chung của hai số nguyên a và b khi và chỉ khi d là ước của a và d cũng là ước của b.

Định nghĩa 1.1.9. Ước chung lớn nhất của hai số a và b, ký hiệu là (a, b), là số nguyên dương lớn nhất d thỏa mãn $d \mid a$ và $d \mid b$. Tức là

$$(a, b) = \max\{d \in \mathbb{Z} : d \mid a \text{ và } d \mid b\}.$$

Ví dụ 1.1.10. $(1, 2) = 1, (5, 10) = 2, (6, 27) = 3$, và với bất kỳ $a, (0, a) = (a, 0) = a$. Đặc biệt $(0, 0) = 0$.

Định nghĩa 1.1.11. Hai số nguyên a và b được gọi là *nguyên tố cùng nhau* nếu $(a, b) = 1$.

Mệnh đề 1.1.12. *Giả sử a và b là các số nguyên với $b \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất hai số nguyên q và r sao cho $a = bq + r$, với $0 \leq r < |b|$.*

Chứng minh. Để cho đơn giản, giả sử cả a và b đều dương. Gọi Q là tập các số nguyên không âm n sao cho $a - bn$ không âm. Khi đó Q khác rỗng bởi vì $0 \in Q$ và Q bị chặn bởi vì $a - bn < 0$ với mọi $n > a/b$. Lấy q là phần tử lớn nhất của Q. Khi đó $r = a - bq < b$, vì nếu ngược lại $q + 1$ cũng thuộc Q. Do đó q và r thỏa điều kiền tồn tại.

Để chứng minh tính duy nhất, giả sử rằng q' và r' cũng thỏa mãn mệnh đề. Khi đó $q' \in Q$ vì $r' = a - bq' \geq 0$, nên $q' \leq q$, và ta có thể viết $q' = q - m$ với $m \geq 0$. Nếu $q' \neq q$, thì $m \geq 1$, nên

$$r' = a - bq' = a - b(q - m) = a - bq + bm = r + bm \geq b$$

do $r \geq 0$, mâu thuẫn. Do đó $q = q'$ và $r' = a - bq' = a - bq = r$, điều phải chứng minh. □

Bổ đề 1.1.13. *Với các số nguyên bất kỳ a và b, ta có*

$$(a, b) = (b, a) = (\pm a, \pm b) = (a, b - a) = (a, b + a).$$

Chứng minh. Chúng tôi chỉ chứng minh $(a, b) = (a, b - a)$, vì các trường hợp khác được chứng minh tương tự. Giả sử $d \mid a$ và $d \mid b$, khi đó tồn tại c_1 và c_2 sao cho $a = c_1 d$ và $b = c_2 d$. Khi đó $b - a = c_2 d - c_1 d = d(c_2 - c_1)$, nên $d \mid (b - a)$. Do đó $(a, b) \leq (a, b - a)$, vì tập mà ta lấy giá trị cực đại của (a, b) là tập con của $(a, b - a)$. Lập tuận tương tự với a được thay bằng $-a$ và b được thay bằng $b - a$, chi ra $(a, b - a) = (-a, b - a) \leq (-a, b) = (a, b)$, chứng tỏ $(a, b) = (a, b - a)$. □

Bổ đề 1.1.14. *Giả sử $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó $(a, b) = (a, b - an)$.*

Chứng minh. Bằng cách áp dụng liên tiếp Bổ đề 1.1.13 n lần, ta có

$$(a, b) = (a, b - a) = (a, b - 2a) = \cdots = (a, b - na).$$

□

Bổ đề 1.1.15. *Với các số nguyên a, b, n bất kỳ, ta có*

$$(an, bn) = (a, b) \cdot |n|.$$